Soluciones del examen de Cálculo

Convocatoria extraordinaria (8 de julio de 2010)

1. *(1 punto) Calcular el siguiente límite:* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+8}{n^2+7}\right)^{3n^2+1}$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+8}{n^2+7}\right)^{3n^2+1} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+8}{n^2+7}-1\right)(3n^2+1)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+7}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{1+7/n^2}} = e^3$$

2. *(1 punto) Estudiar la convergencia de la siguiente serie numérica:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 7^n}{n!}$

Solución: Veamos qué sucede si aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2 7^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^2 7^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 7^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^2 7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7(n+1)n!(n+1)}{(n+1)!\, n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{7(n+1)}{n^2} = 0$$

Como el límite anterior es menor que 1, el criterio del cociente es decisivo y la serie resulta convergente.

3. *(1 punto) Calcular el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{5n}(x-2)^n$

Solución: Calculemos el límite de la sucesión formada por la raíz n-ésima de los coeficientes de la serie:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{5n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{3n}\cdot 2}{5n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^3\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n}} = 2^3 = 8$$

ya que, si k es una constante positiva, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$, y también $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Por tanto, el radio de convergencia de la serie de potencias dada es

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+1}}{5n}}} = \frac{1}{8}$$

4. *(1 punto) Estudiar si existe el siguiente límite:* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3y^2-x^2}{x^2+y^2}$.

Solución: Consideremos el subconjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} : x=0\}$ y calculemos, si existe, el límite relativo a este subconjunto:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{-x^2+3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{3y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 3 = 3$$

Ahora calculemos el límite relativo al subconjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\,:\,y=0\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{-x^2+3y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$$

como los límites anteriores no coinciden, podemos concluir que el límite doble dado no existe.

5. *(2,5 puntos) Dada la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}2x-y+x^3\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

se pide:

1. *(1 punto) Calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.
2. *(0,8 puntos) Hallar la ecuación del plano tangente a su gráfica en el punto* $(0,1,-1)$.
3. *(0,7 puntos) Calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Solución:

(a) Podemos calcular las derivadas pedidas utilizando las reglas de derivación y particularizando en el punto dado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2+3x^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}+x^3\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\\ &= 2+3x^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2x^4}{(x^2+y^2)^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -1+x^3\left(-\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}=-1+\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) &= 2+0\cos 1+0\operatorname{sen}1=2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) &= -1+0\operatorname{sen}1=-1\end{aligned}$$

(b) La ecuación del plano tangente viene dada por:

$$z=f(0,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\cdot(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot(y-1)=-1+2x+(-1)(y-1)$$

es decir,

$$\boxed{z=2x-y}$$

(c) Debemos utilizar la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-0-x^3\cos(1/x^2)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2-x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)=2$$

6. *(1,5 puntos) Encontrar y clasificar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 4x - 9y + 3$.*

Solución: Como la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ (pues se trata de un polinomio), todos sus extremos relativos son puntos críticos. Veamos cuáles sus los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 9 = 0 \iff y = \pm\sqrt{3}$$

entonces el conjunto de puntos críticos es

$$\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)\right\}$$

Estudiemos el hessiano en los puntos críticos: Como

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

entonces

$$Hf\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = 72 > 0, \quad Hf\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right) = -72 < 0,$$
$$Hf\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = -72 < 0, \; Hf\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right) = 72 > 0.$$

Por tanto, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$ y $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ son puntos de silla, mientras que los otros dos son puntos de extremos relativos. Concretamente, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = \frac{12}{\sqrt{3}} > 0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$; y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right) = -\frac{12}{\sqrt{3}} < 0$, entonces f alcanza un máximo relativo en $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$.

7. *(1 punto) Calcular: $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}\, dx$.*

Solución: Descomponemos la función racional del integrando en fracciones simples, para lo cual hallamos A y B verificando

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

luego A yB deben verificar

$$x + 1 = A(x+2) + B(x-1).$$

Ahora, igualando los coeficientes del polinomio de la derecha con los del polinomio de la izquierda (una vez efectuadas la operaciones pertinentes), podemos establecer un sistema con las incógnitas A y B; o bien podemos particularizar la igualdad para ciertos valores de la variable polinómica, por ejemplo:

$$\text{Si } x = 1 \implies 2 = 3A \implies A = 2/3$$
$$\text{Si } x = -2 \implies -1 = -3B \implies B = 1/3$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx &= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left((x-1)^2|x+2|\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

8. *(1 punto) Hallar el volumen del sólido Ω acotado entre los planos $z = 0$, $z = 4 - y$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.*

Solución: Se trata de un sólido XY-proyectable limitado inferiormente por el plano $z = 0$ y superiormente por el plano $z = 4 - y$, siendo su proyección en XY:

$$D = \Pi_{XY}(\Omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

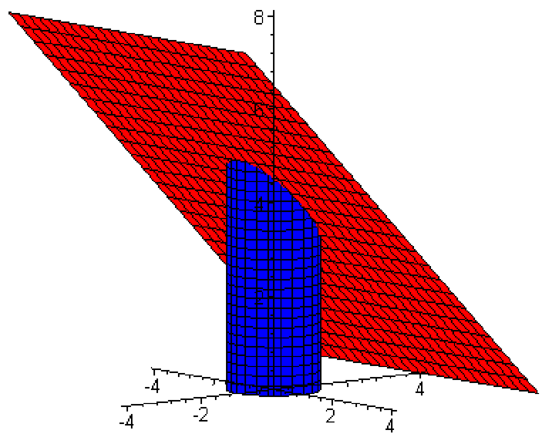

Figura 1: Sólido entre cilindro (en azul), plano XY y plano $z = 4 - y$ (en rojo).

Por tanto, el volumen pedido viene dado por

$$Vol(\Omega) = \iint_D (4 - y)\,dxdy.$$

Para resolver esta integral, podemos realizar el cambio a coordenadas polares $\varphi \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right.$, cuyo jacobiano es $J_\varphi = \rho$, con lo que la integral quedaría:

$$Vol(\Omega) = \iint_{D^*} (4 - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\rho\,d\rho d\theta$$

donde $D^* = \varphi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) \,:\, 0 \leq \rho \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$; en consecuencia

$$\begin{aligned}Vol(\Omega) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (4\rho - \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta)d\rho = \int_0^{2\pi}\left(\left[2\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(2 - \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta = 4\pi\end{aligned}$$